

## Функции Грина многослойных цилиндрических структур в задачах излучения, распространения и дифракции электромагнитных волн

*С. Дайлис<sup>1</sup>, С. Н. Шабунин<sup>2\*</sup>*

<sup>1</sup> National Instruments — AWR Group, Эль Сегундо, США

<sup>2</sup> Уральский федеральный университет имени первого  
Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия

\*s. n.shabunin@urfu.ru

**Аннотация.** Показано применение аппарата функций Грина многослойных магнито-диэлектрических структур к решению задач излучения, распространения и дифракции электромагнитных волн. В качестве источников электромагнитного поля рассматриваются произвольно ориентированные сторонние электрические и магнитные токи. Для описания слоистой радиальной структуры применен метод эквивалентных электрических цепей. Для моделирования слоев и границ областей используются матрицы передачи и эквивалентные нагрузки. Модальные напряжения и токи в эквивалентных цепях ассоциируются со спектральными составляющими электромагнитного поля. Предложенный подход позволяет конструировать универсальные алгоритмы для задач распространения волн в направляющих структурах, излучения печатных и щелевых антенн, расположенных на проводящем цилиндре с укрытиями, решать задачи дифракции электромагнитных волн с произвольным числом слоев. При этом материалы слоев могут иметь произвольные значения диэлектрической и магнитной проницаемости, учитываются потери в материале. При моделировании могут рассматриваться материалы как с положительным, так и с отрицательным коэффициентом рефракции. Предложенный подход был использован для решения задач электромагнитного возбуждения структур с метаматериалами.

**Ключевые слова.** Функции Грина, электромагнитные волны, излучение, распространение, дифракция.

## Green's Functions of Multi-layered Cylindrical Structures for Electromagnetic Radiation, Propagation and Scattering Problems Solution

*Samuil Daylis<sup>1</sup>, Sergey N. Shabunin<sup>2\*</sup>*

<sup>1</sup> National Instruments — AWR Group, El Segundo, USA

<sup>2</sup> Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, Ekaterinburg, Russia

\* s. n.shabunin@urfu.ru

**Abstract.** The method of Green's functions of layered cylindrical magnetodielectric structures is applied to solution of radiation, propagation and scattering problems. Excitation of electromagnetic field is provided by arbitrary distribution of impressed electric and magnetic currents. The model of equivalent circuits is used for description of layered structure. Transmission matrices and various kinds of loads are used for modelling layered structure and boundaries. Equivalent voltages and currents in modelling circuits are associated with spectral field components. Suggested method allows to construct universal algorithms for wave propagation, patch and slot antennas radiation and scattering problems with any number of layers made of materials of arbitrary permittivity and permeability. Positive and negative refraction index of materials may be taken into account. Suggested technique has been successfully applied to radiating structures made of meta-materials commonly used in electromagnetic designs.

**Keywords.** Green's functions, electromagnetic waves, radiation, propagation, scattering.

---

© Daylis S., Shabunin S. N., 2017

## Введение

В настоящее время для решения задач излучения электромагнитных волн, распространения и дифракции используются как аналитические методы (в меньшей степени), так и численные, с большим перечнем программ компьютерного моделирования, построенных на их основе (в большей степени). Отчасти это объясняется существенно более высокими требованиями к физико-математической подготовке пользователей, использующих аналитические подходы. Преимущество аналитических методов заключается в возможности четкой физической трактовки получаемых результатов, хотя их применение ограничено в основном координатными задачами и соответствующим выбором формы рассматриваемых объектов. Численные методы позволяют анализировать объекты произвольной формы с произвольными материалами, однако они требуют существенных компьютерных ресурсов и не позволяют в явном виде понять наблюдаемые физические процессы. Не следует противопоставлять оба подхода. Наилучшие результаты могут быть получены при разумном сочетании как аналитических, так и численных методов. Аналитические подходы могут быть полезны на начальных этапах проектирования для оптимизации характеристик структур и поиска оптимального решения [1–5]. На следующих этапах, с использованием компьютерных программ типа HFSS, FEKO, CST Microwave Studio и им подобных, полученное

решение можно использовать для уточнения характеристик моделей и проведения уточняющих расчетов.

Метод функций Грина является представителем аналитических подходов и удобен для решения координатных задач. Он позволяет четко интерпретировать типы волн и физически трактовать получаемые результаты. Это дает возможность принимать оптимальные решения при конструировании микроволновых устройств. Особый выигрыш замечен при вычислении полей излучения антенн и расчете рассеянных электромагнитных полей в дальней зоне. Применение метода стационарной фазы позволяет получать аналитические выражения для компонентов поля в дальней зоне. При этом скорость проведения вычислений увеличивается на несколько порядков по сравнению со специализированными программными средствами. Различные виды оптимизации структур и конструкций реализуемы в приемлемое время. Кроме того, возможны вычисления характеристик поля в конкретной области. При том, что все граничные условия учитываются при конструировании функции Грина, отпадает необходимость их учета при вычислениях.

В предлагаемой статье описано строгое решение системы уравнений Максвелла в радиально неоднородной магнито-диэлектрической среде с произвольными источниками, вывод функций Грина и их использование для решения задач электромагнитного излучения, дифракции и распространения волн.

### **Полное волновое решение задачи электромагнитного возбуждения многослойной цилиндрической структуры**

Для построения функций Грина для многослойных цилиндрических структур в спектральной области использовано строгое решение системы уравнений Максвелла для радиально неоднородных структур с произвольными электродинамическими характеристиками материалов и произвольной ориентацией магнитных и электрических элементарных токов (рис. 1), впервые описанное в [6]. Широкое использование матриц при построении функций Грина делает предложенный подход особо удобным при реализации программ вычислений в среде MathLAB. Рассматриваемый подход позволяет легко описывать слои, импедансные поверхности, покрытия, в том числе в виде метаматериалов. Далее кратко описана методика построения функций Грина для структур различного вида.

Неоднородные уравнения Максвелла, записанные в цилиндрической системе координат для произвольного однородного слоя с заданным распределением источников, позволяют выразить все компоненты электромагнитного поля через осевые составляющие. С использованием разложения продольных компонентов поля  $E_z, H_z$  в цилиндрической области в интеграл-ряд Фурье записываются неоднород-

ные уравнения Бесселя для каждой из этих составляющих. Решение таких уравнений приведено в следующем параграфе статьи.

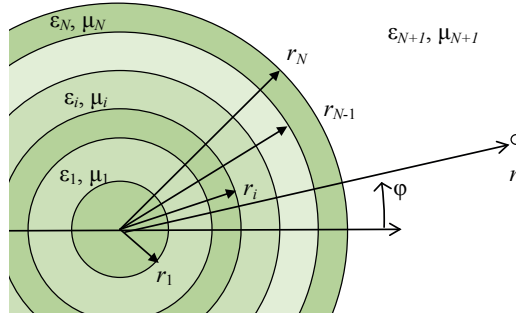


Рис. 1. Многослойная цилиндрическая структура

Спектральные составляющие поля позволяют рассчитать любую компоненту поля следующим образом:

$$\dot{E}_i(r, \varphi, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jm\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{E}_{imh}(r) e^{-jhz} dh, \quad (1)$$

$$\dot{H}_i(r, \varphi, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jm\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{H}_{imh}(r) e^{-jhz} dh. \quad (2)$$

При разложении поля по волнам типа Е и Н относительно оси  $z$  поперечные компоненты в  $i$ -м слое рассчитываются через продольные (1), (2) следующим способом:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\varphi mh} &= -\frac{mh}{\gamma_i^2} \frac{1}{r} \dot{E}_{z mh} + \frac{j\omega\mu_i}{\gamma_i^2} \frac{d\dot{H}_{z mh}}{dr}, \quad \dot{H}_{\varphi mh} = -\frac{j\omega\epsilon_i}{\gamma_i^2} \frac{d\dot{E}_{z mh}}{dr} - \frac{mh}{\gamma_i^2} \frac{1}{r} \dot{H}_{z mh}, \\ \dot{E}_{rmh} &= -\frac{jh}{\gamma_i^2} \frac{d\dot{E}_{z mh}}{dr} - \frac{\omega\mu_i}{\gamma_i^2} \frac{m}{r} \dot{H}_{z mh}, \quad \dot{H}_{rmh} = \frac{\omega\epsilon_i}{\gamma_i^2} \frac{m}{r} \dot{E}_{z mh} - \frac{mh}{\gamma_i^2} \frac{d\dot{H}_{z mh}}{dr}. \end{aligned}$$

Для моделирования радиальной слоистой структуры используется модель эквивалентных электрических цепей, состоящая из двух параллельных линий. Модальное напряжение в эквивалентной  $E$ -линии ставится в соответствие со спектральной составляющей поля  $\dot{E}_{z mh}$ , а модальный ток в эквивалентной  $H$ -линии сопоставляется со спектральной компонентой  $\dot{H}_{z mh}$ . Модальный ток в  $E$ -линии ассоциируется с компонентой поля  $\dot{H}_{\varphi mh}$ , а модальное напряжение в эквивалентной  $H$ -линии ассоциируется с компонентой  $\dot{E}_{\varphi mh}$  (3). Таким образом, с учетом криволинейности имеем:

$$V_{mh}^E = \dot{E}_{zmh}^e, \quad I_{mh}^H = \dot{H}_{zmh}^h, \quad I_{mh}^E = -k_0 r \dot{H}_{\varphi mh}^e, \quad V_{mh}^H = k_0 r \dot{E}_{\varphi mh}^h. \quad (3)$$

Выражения для продольных спектральных составляющих электрического и магнитного полей будут приведены ниже.

Распространение волн в каждом однородном слое моделируется двумя независимыми линиями, формально описываемыми 8-полюсником, имеющим матрицу передачи  $[C]^i$  (рис. 2).

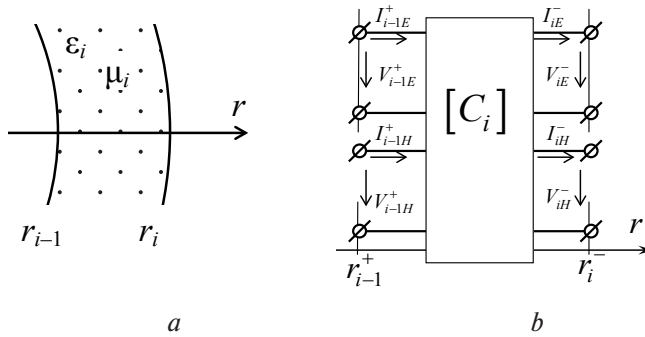


Рис. 2. Слой однородного магнитоэлектрика (a) и его матрица передачи (b)

Так как между эквивалентными  $E$ - и  $H$ -линиями в однородном слое на интервале между внутренними границами нет взаимодействия, матрица передачи имеет вид

$$[C_i] = \begin{bmatrix} [C_{iE}] & [0] \\ [0] & [C_{iH}] \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где  $[0]$  — нулевая матрица передачи 2-го порядка. Распространение волн в радиальной  $E$ -линии описывается матрицей передачи 4-полюсника  $[C_{iE}]$  следующим образом:

$$\begin{bmatrix} V_{i-1E}^+ \\ I_{i-1E}^+ \end{bmatrix} = [C_{iE}] \begin{bmatrix} V_{iE}^- \\ I_{iE}^- \end{bmatrix}, \quad (5)$$

в то время как распространение волн в радиальной  $H$ -линии описывается матрицей передачи  $[C_{iH}]$

$$\begin{bmatrix} V_{i-1H}^+ \\ I_{i-1H}^+ \end{bmatrix} = [C_{iH}] \begin{bmatrix} V_{iH}^- \\ I_{iH}^- \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где  $V_{i-1}^+$ ,  $I_{i-1}^+$ ,  $V_i^-$  и  $I_i^-$  являются модальными напряжениями и токами на внутренних границах  $i$ -го слоя. Распределение электромагнитного поля внутри слоя связано с радиальной зависимостью функций модальных напряжений и токов. Функция Грина неоднородных дифференциальных уравнений для определения модальных напряжений и токов однородного слоя строится из двух решений однородных уравнений с заданными граничными условиями на концах слоя по радиальной координате  $\vec{V}_{E,H}$ ,  $\vec{V}_{E,H}$  и  $\vec{I}_{E,H}$ ,  $\vec{I}_{E,H}$ . Направление стрелки указывает на границу с заданными условиями. Подобный подход описан в [7]. Для описания эквивалентной цепи используются направленные напряжения, токи, проводимости и сопротивления.

Матрицы передачи  $i$ -го слоя для граничных условий, заданных в сечении  $r < r_{i-1}$ , имеют вид

$$[\bar{C}_{iE}] = \begin{bmatrix} C_{2m}(\gamma_i r_{i-1}, \gamma_i r_i) & -j \frac{Z_0 \beta_i}{\varepsilon'_i} \frac{1}{k_0 r_i} S_{2m}(\gamma_i r_{i-1}, \gamma_i r_i) \\ -j \frac{\varepsilon'_i k_0}{Z_0 \beta_i} r_{i-1} S_{1m}(\gamma_i r_{i-1}, \gamma_i r_i) & \frac{r_{i-1}}{r_i} C_{1m}(\gamma_i r_{i-1}, \gamma_i r_i) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$[\bar{C}_{iH}] = \begin{bmatrix} \frac{r_{i-1}}{r_i} C_{1m}(\gamma_i r_{i-1}, \gamma_i r_i) & -j \frac{\mu'_i}{Y_0 \beta_i} k_0 r_{i-1} S_{1m}(\gamma_i r_{i-1}, \gamma_i r_i) \\ -j \frac{Y_0 \beta_i}{\mu'_i} \frac{1}{k_0 r_i} S_{2m}(\gamma_i r_{i-1}, \gamma_i r_i) & C_{2m}(\gamma_i r_{i-1}, \gamma_i r_i) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

Для граничных условий, заданных в сечении  $r > r_i$ , матрица передачи записываются следующим образом

$$[\bar{C}_{iE}] = \begin{bmatrix} C_{2m}(\gamma_i r_{i-1}, \gamma_i r_i) & j \frac{Z_0 \beta_i}{\varepsilon'_i} \frac{1}{k_0 r_i} S_{2m}(\gamma_i r_{i-1}, \gamma_i r_i) \\ j \frac{\varepsilon'_i k_0}{Z_0 \beta_i} r_{i-1} S_{1m}(\gamma_i r_{i-1}, \gamma_i r_i) & \frac{r_{i-1}}{r_i} C_{1m}(\gamma_i r_{i-1}, \gamma_i r_i) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$[\bar{C}_{iH}] = \begin{bmatrix} \frac{r_{i-1}}{r_i} C_{1m}(\gamma_i r_{i-1}, \gamma_i r_i) & j \frac{\mu'_i}{Y_0 \beta_i} k_0 r_{i-1} S_{1m}(\gamma_i r_{i-1}, \gamma_i r_i) \\ j \frac{Y_0 \beta_i}{\mu'_i} \frac{1}{k_0 r_i} S_{2m}(\gamma_i r_{i-1}, \gamma_i r_i) & C_{2m}(\gamma_i r_{i-1}, \gamma_i r_i) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

В (7)–(10) фундаментальные функции Коши

$$C_{1m}(x, y) = \frac{y\pi}{2} [J_m(y)N'_m(x) - N_m(y)J'_m(x)], \quad (11)$$

$$C_{2m}(x, y) = \frac{y\pi}{2} [N'_m(y)J_m(x) - J'_m(y)N_m(x)], \quad (12)$$

$$S_{1m}(x, y) = \frac{y\pi}{2} [N'_m(y)J'_m(x) - J'_m(y)N'_m(x)], \quad (13)$$

$$S_{2m}(x, y) = \frac{y\pi}{2} [N_m(y)J_m(x) - J_m(y)N_m(x)], \quad (14)$$

где  $J_m$ ,  $N_m$  — функции Бесселя и Неймана. В некоторых случаях, например при решении задач дифракции [8], функции Неймана лучше заменить на функции Ганкеля с соответствующей коррекцией выражений (11)–(14).

В выражениях (7)–(10)  $\gamma_i = \sqrt{\varepsilon_i \mu_i - k^2}$ ,  $\beta_i = \gamma_i / k_0$ ,  $Z_0 = Y_0^{-1} = 120\pi \text{ Ohm}$ ,  $k_0$  — волновое число свободного пространства.

В цилиндрических структурах, в отличие от плоских и сферических структур, условие непрерывности тангенциальных составляющих поля приводит к взаимосвязи эквивалентных линий. Обмен энергии между  $E$ - и  $H$ -линиями моделируется 8-полюсником границы между слоями с матрицей передачи границы  $[\Gamma_i]$  (рис. 3).

$$\begin{bmatrix} V_{iE}^- \\ I_{iE}^- \\ V_{iH}^- \\ I_{iH}^- \end{bmatrix} = [\Gamma_i] \begin{bmatrix} V_{iE}^+ \\ I_{iE}^+ \\ V_{iH}^+ \\ I_{iH}^+ \end{bmatrix}, \quad [\Gamma_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -N_i \\ N_i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{где } N_i = \frac{mh}{k_0} \left( \frac{1}{\gamma_i^2} - \frac{1}{\gamma_{i+1}^2} \right).$$

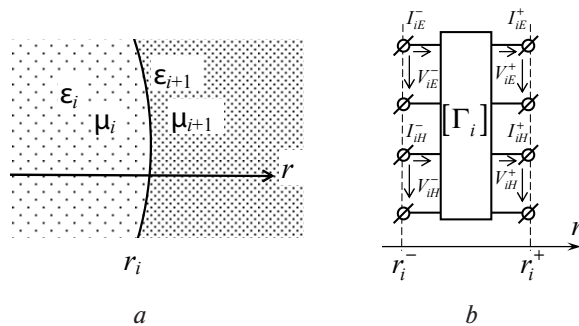


Рис. 3. Граница между слоями (a) и ее матрица передачи (b)

Внутренние и внешние границы областей моделируются эквивалентными концевыми сопротивлениями и проводимостями (рис. 4).

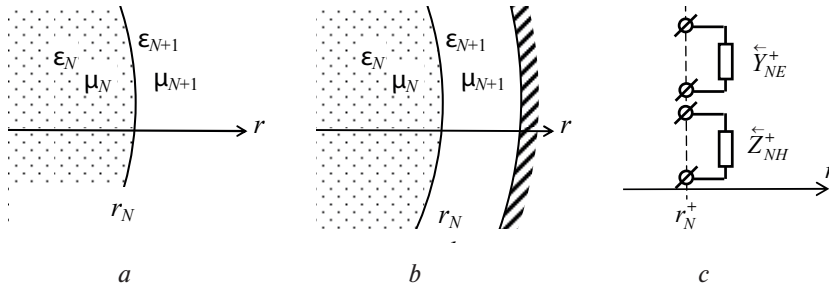


Рис. 4. Концевые нагрузки (с) для внешнего открытого пространства (а) и ограниченного идеальным проводником (б)

Для открытого пространства (рис. 4, а) концевые сопротивления и проводимости вычисляются следующим образом:

$$\vec{Z}_{NH}^+ = jZ_0 \frac{\mu'_{N+1}}{\beta_{N+1}} k_0 r_N \frac{H_m^{(2)'}(\gamma_{N+1} r_N)}{H_m^{(2)}(\gamma_{N+1} r_N)}, \quad (15)$$

$$\vec{Y}_{NE}^+ = jY_0 \frac{\epsilon'_{N+1}}{\beta_{N+1}} k_0 r_N \frac{H_m^{(2)'}(\gamma_{N+1} r_N)}{H_m^{(2)}(\gamma_{N+1} r_N)}, \quad (16)$$

где  $H_m^{(2)}(\gamma_{N+1} r_N)$  и  $H_m^{(2)'}(\gamma_{N+1} r_N)$  — функции Ганкеля и их производные, соответственно.

Если внешнее пространство ограничено идеально проводящей поверхностью (рис. 4, б), например как в круглом волноводе, концевые нагрузки имеют вид:

$$\vec{Y}_{NE}^+ = jY_0 \frac{\epsilon'_{N+1}}{\beta_{N+1}} k_0 r_N \frac{C_{1m}(\gamma_{N+1} r_N, \gamma_{N+1} r_{N+1})}{S_{2m}(\gamma_{N+1} r_N, \gamma_{N+1} r_{N+1})}, \quad (17)$$

$$\vec{Z}_{NH}^+ = jZ_0 \frac{\mu'_{N+1}}{\beta_{N+1}} k_0 r_N \frac{S_{1m}(\gamma_{N+1} r_N, \gamma_{N+1} r_{N+1})}{C_{2m}(\gamma_{N+1} r_N, \gamma_{N+1} r_{N+1})}. \quad (18)$$

Для импедансной цилиндрической поверхности концевые проводимости

$$\vec{Y}_{NE}^+ = k_0 r_N / Z_S, \quad \vec{Z}_{NH}^+ = k_0 r_N Z_S.$$

Для реальных проводников поверхностный импеданс  $Z_S = \sqrt{\omega \mu_0 / 2\sigma} (1 + j)$ , где  $\sigma$  — удельная проводимость металла.

Набор вариантов для внутренней области более узок. Это могут



быть проводящие поверхности, импедансные поверхности и область однородного магнитоэлектрика (рис. 5). Внутренняя область в терминологии эквивалентных электрических цепей моделируется концевыми нагрузками.

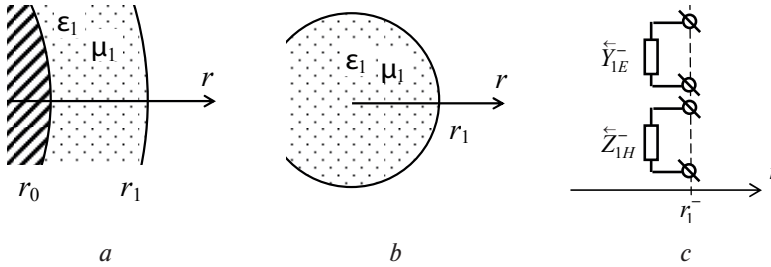


Рис. 5. Концевые нагрузки (с) для проводящего цилиндра со слоем (а) и диэлектрического цилиндра (б)

Ниже приведены выражения для расчета концевых проводимостей для однородной среды из магнито-диэлектрика:

$$\bar{Y}_{1E}^- = -jY_0 \frac{\varepsilon'_1}{\beta_1} k_0 r_1 \frac{J'_m(\gamma_1 r_1)}{J_m(\gamma_1 r_1)}, \quad \bar{Z}_{1H}^- = -jZ_0 \frac{\mu'_1}{\beta_1} k_0 r_1 \frac{J'_m(\gamma_1 r_1)}{J_m(\gamma_1 r_1)},$$

идеального проводника с покрытием:

$$\bar{Y}_{1E}^- = jY_0 \frac{\varepsilon'_1}{\beta_1} k_0 r_1 \frac{C_{1m}(\gamma_1 r_1, \gamma_1 r_0)}{S_{2m}(\gamma_1 r_1, \gamma_1 r_0)}, \quad \bar{Z}_{1H}^- = jZ_0 \frac{\mu'_1}{\beta_1} k_0 r_1 \frac{S_{1m}(\gamma_1 r_1, \gamma_1 r_0)}{C_{2m}(\gamma_1 r_1, \gamma_1 r_0)},$$

и импедансной поверхности:

$$\bar{Y}_{1E}^- = \bar{Y}_{1E}^+ = -k_0 r_0 / Z_S, \quad \bar{Z}_{1H}^- = \bar{Z}_{1H}^+ = -k_0 r_1 Z_S.$$

Приведенные выражения для концевых нагрузок позволяют решать широкий спектр задач электродинамики. Например, для задачи излучения печатной антенны на цилиндрической поверхности целесообразно выбрать вариант: слой диэлектрика на идеальном проводнике слева в эквивалентной цепи (в сторону оси системы) и неограниченное пространство справа. Для задачи распространения волн в коаксиальной линии слева выбирается вариант: слой диэлектрика на идеальном проводнике и справа слой диэлектрика на проводящей поверхности (внешний экран коаксиальной линии).

Принятая в статье методика моделирования многослойных структур отрезками эквивалентных линий и использование матриц передачи слоев и границ имеют свои особенности. Так как точки источника и точки наблюдения при расчете электромагнитного поля могут располагаться произвольно, в зависимости от вида решаемой задачи, ши-

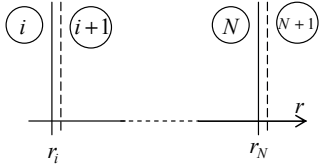
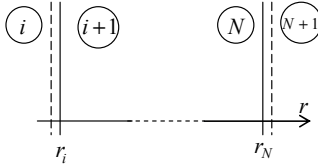
роко используются произведения цепочки матриц передачи и матриц слоев. При этом важен выбор направления пересчета эквивалентных напряжений и токов, что отмечается стрелками над соответствующими обозначениями. Напряжения и токи определяются вблизи границ в сечении, показанном на рисунках штриховой линией («плоскость» отсчета). Следует напомнить, что слева и справа от границы напряжения и токи могут претерпевать разрыв.

Если необходимо выполнить пересчет от сечения  $r_1$  к сечению  $r_i$ , то для этого требуется определить матрицу  $[L_i]$  или  $[\tilde{L}_i]$  в соответствии с положением сечения отсчета относительно  $r_i$ .

Пересчет модальных напряжений и токов между сечениями $r_1^-$ и $r_i^+$	Пересчет модальных напряжений и токов между сечениями $r_1^-$ и $r_i^-$
$\begin{bmatrix} \tilde{V}_{1E}^- \\ \tilde{I}_{1E}^- \\ \tilde{V}_{1H}^- \\ \tilde{I}_{1H}^- \end{bmatrix} = [L_i] \begin{bmatrix} \tilde{V}_{iE}^+ \\ \tilde{I}_{iE}^+ \\ \tilde{V}_{iH}^+ \\ \tilde{I}_{iH}^+ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \tilde{V}_{1E}^- \\ \tilde{I}_{1E}^- \\ \tilde{V}_{1H}^- \\ \tilde{I}_{1H}^- \end{bmatrix} = [\tilde{L}_i] \begin{bmatrix} \tilde{V}_{iE}^- \\ \tilde{I}_{iE}^- \\ \tilde{V}_{iH}^- \\ \tilde{I}_{iH}^- \end{bmatrix}$
$[L_i] = \begin{cases} [\Gamma_1] \prod_{j=2}^i [L_j], & N \geq 2, 2 \leq i \leq N, \\ [\Gamma_1], & N = 1 \end{cases}$	$[\tilde{L}_i] = \begin{cases} [\Gamma_1] \prod_{j=2}^{i-1} [L_j], & N \geq 3, 3 \leq i \leq N, \\ [\Gamma_1] [\tilde{C}_2], & N = 2, \\ [1], & N = 1 \end{cases}$

Выше матрица передачи  $[L_i] = [\tilde{C}_i] [\Gamma_i]$ .

Если заданы концевые нагрузки с правой части схемы (на внешней границе), то есть необходимо выполнить пересчет от сечения  $r_N$  к сечению  $r_i$ , то требуется определить матрицу  $[R_i]$  или  $[\tilde{R}_i]$  в соответствии с положением сечения отсчета относительно сечения  $r_i$ .

	
Пересчет модальных напряжений и токов между сечениями $r_i^+$ и $r_N^+$	Пересчет модальных напряжений и токов между сечениями $r_i^-$ и $r_N^+$
$\begin{bmatrix} \vec{V}_{iE}^+ \\ \vec{I}_{iE}^+ \\ \vec{V}_{iH}^+ \\ \vec{I}_{iH}^+ \end{bmatrix} = [R_i] \begin{bmatrix} \vec{V}_{NE}^+ \\ \vec{I}_{NE}^+ \\ \vec{V}_{NH}^+ \\ \vec{I}_{NH}^+ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \vec{V}_{iE}^- \\ \vec{I}_{iE}^- \\ \vec{V}_{iH}^- \\ \vec{I}_{iH}^- \end{bmatrix} = [\tilde{R}_i] \begin{bmatrix} \vec{V}_{NE}^+ \\ \vec{I}_{NE}^+ \\ \vec{V}_{NH}^+ \\ \vec{I}_{NH}^+ \end{bmatrix}$
$[R_i] = \begin{cases} \prod_{j=i+1}^N [r_j], & N \geq 2, 2 \leq i \leq N, \\ [1], & i = N \end{cases}$	$[\tilde{R}_i] = \begin{cases} [r_i] \prod_{j=i+1}^N [r_j], & N \geq 2, 1 \leq i \leq N-1, \\ [\Gamma_N], & i = N \end{cases}$

Матрица передачи  $[r_i] = [\vec{C}_i][\Gamma_i]$ .

Обратные матрицы  $[F_i] = [L_i]^{-1}$ ,  $[\tilde{F}_i] = [\tilde{L}_i]^{-1}$ ,  $[B_i] = [R_i]^{-1}$ ,  $[\tilde{B}_i] = [\tilde{R}_i]^{-1}$  позволяют выполнить пересчет эквивалентных напряжений и токов в обратном порядке.

Предложенный подход позволяет создавать быстрые алгоритмы вычислений компонентов поля, так как все задачи учета граничных условий между слоями решаются на этапе аналитических выкладок.

Входные проводимости и сопротивления в различных сечениях эквивалентных цепей приведены ниже:

$$\tilde{Y}_{NE}^+ = \frac{F_{21}^N + F_{22}^N Y_{1E} + (F_{24}^N + F_{23}^N Z_{1N}) \tilde{Y}_{1HE}^C}{F_{11}^N + F_{12}^N Y_{1E} + (F_{14}^N + F_{13}^N Z_{1N}) \tilde{Y}_{1HE}^C}, \quad (19)$$

$$\tilde{Y}_{1HE}^C = -\frac{F_{31}^N + F_{32}^N Y_{1E} + (F_{41}^N + F_{42}^N Y_{1E}) Z_{NH}}{F_{34}^N + F_{33}^N Z_{1H} + (F_{44}^N + F_{43}^N Z_{1H}) Z_{NH}}, \quad (20)$$

$$\bar{Z}_{NH}^+ = \frac{(F_{31}^N + F_{32}^N Y_{1E}) \bar{Z}_{1EH}^C + F_{33}^N Z_{1H} + F_{34}^N}{(F_{41}^N + F_{42}^N Y_{1E}) \bar{Z}_{1EH}^C + F_{43}^N Z_{1H} + F_{44}^N}, \quad (21)$$

$$\bar{Z}_{1EH}^C = -\frac{F_{23}^N Z_{1H} + F_{24}^N + (F_{13}^N Z_{1H} + F_{14}^N) Y_{NE}}{F_{21}^N + F_{22}^N Y_{1E} + (F_{11}^N + F_{12}^N Y_{1E}) Y_{NE}}, \quad (22)$$

$$\bar{Y}_{1E}^- = \frac{\tilde{R}_{21}^1 + \tilde{R}_{22}^1 Y_{NE} + (\tilde{R}_{23}^1 Z_{NH} + \tilde{R}_{24}^1) \bar{Y}_{NHE}^C}{\tilde{R}_{11}^1 + \tilde{R}_{12}^1 Y_{NE} + (\tilde{R}_{13}^1 Z_{NH} + \tilde{R}_{14}^1) \bar{Y}_{NHE}^C}, \quad (23)$$

$$\bar{Y}_{NHE}^C = -\frac{\tilde{R}_{31}^1 + \tilde{R}_{32}^1 Y_{NE} + (\tilde{R}_{41}^1 + \tilde{R}_{42}^1 Y_{NE}) Z_{1H}}{\tilde{R}_{33}^1 Z_{NH} + \tilde{R}_{34}^1 + (\tilde{R}_{43}^1 Z_{NH} + \tilde{R}_{44}^1) Z_{1H}}, \quad (24)$$

$$\bar{Z}_{1H}^- = \frac{(\tilde{R}_{31}^1 + \tilde{R}_{32}^1 Y_{NE}) \bar{Z}_{NEH}^C + \tilde{R}_{33}^1 Z_{NH} + \tilde{R}_{34}^1}{(\tilde{R}_{41}^1 + \tilde{R}_{42}^1 Y_{NE}) \bar{Z}_{NEH}^C + \tilde{R}_{43}^1 Z_{NH} + \tilde{R}_{44}^1}, \quad (25)$$

$$\bar{Z}_{NEH}^C = -\frac{\tilde{R}_{23}^1 Z_{NH} + \tilde{R}_{24}^1 + (\tilde{R}_{13}^1 Z_{NH} + \tilde{R}_{14}^1) Y_{1E}}{\tilde{R}_{21}^1 + \tilde{R}_{22}^1 Y_{NE} + (\tilde{R}_{11}^1 + \tilde{R}_{12}^1 Y_{NE}) Y_{1E}}, \quad (26)$$

где сопротивления  $\bar{Z}_{1EH}^C$ ,  $\bar{Z}_{NEH}^C$  и проводимости  $\bar{Y}_{1EH}^C$ ,  $\bar{Y}_{NHE}^C$  являются сопротивлениями и проводимостями связи E- и H-lines в сечениях  $r_1$  и  $r_N$  соответственно. Запись входных проводимостей и сопротивлений (19), (21), (23) и (25) для произвольных сечений позволяет рассчитывать распределение поля в нужном слое, не решая задачу для всего пространства. Это также позволяет существенно ускорить решение электродинамических задач.

Для нормировки модальных напряжений и токов в разных слоях относительно выбранного опорного значения (рис. 6) используются коэффициенты трансформации по напряжению  $T_{n,p}^V = \bar{V}_E(r_n) / \bar{V}_E(r_p)$  и току  $T_{n,p}^I = \bar{I}_H(r_n) / \bar{I}_H(r_p)$ .

Коэффициенты трансформации рассчитываются следующим образом:

$$T_{n,p}^I = \frac{\tilde{R}_{44}^n + \tilde{R}_{43}^n Z_{NH} + (\tilde{R}_{42}^n Y_{NE} + \tilde{R}_{41}^n) \bar{Z}_{NEH}^C}{\tilde{R}_{44}^p + \tilde{R}_{43}^p Z_{NH} + (\tilde{R}_{42}^p Y_{NE} + \tilde{R}_{41}^p) \bar{Z}_{NEH}^C},$$

$$T_{n,p}^V = \frac{\tilde{R}_{11}^n + \tilde{R}_{12}^n Z_{NH} + (\tilde{R}_{13}^n Y_{NE} + \tilde{R}_{14}^n) \bar{Y}_{NHE}^C}{\tilde{R}_{11}^p + \tilde{R}_{12}^p Z_{NH} + (\tilde{R}_{13}^p Y_{NE} + \tilde{R}_{14}^p) \bar{Y}_{NHE}^C}.$$

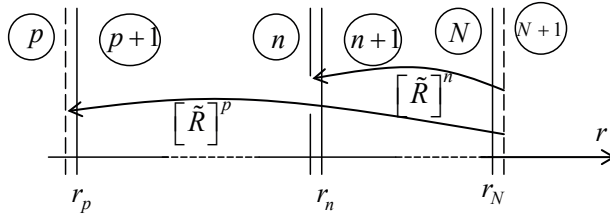


Рис. 6. К расчету коэффициентов трансформации

Приведенные выше выражения позволяют проводить расчеты для широкого класса задач: структур, ограниченных со всех сторон (резонаторов), полуограниченных (например, линий передачи), неограниченных (например, задачи дифракции тел вращения с укрытиями). Эквивалентная схема в каждом случае собирается из элементов, моделирующих слои и границы, как из кубиков, в том числе и при алгоритмизации используются одинаковые сегменты программ компьютерного моделирования. Имеется возможность достаточно гибко изменять как число слоев, так и их электродинамические характеристики.

### Расчет продольных спектральных компонентов электрического и магнитного поля

Описанные выше модели слоев и границ используются для расчета осевых составляющих поля. Будем считать, что точка источника лежит в слое  $p$ , а точка наблюдения — в слое  $n$ . Спектральные плотности разложения продольных компонентов электрического и магнитного поля рассчитываются следующим образом:

$$E_{zmh}(r) = -\frac{1}{2\pi} \int_{V'} [\Phi_1^E(r, r', \varphi', z'; m, h) + \Phi_2^E(r, r', \varphi', z'; m, h)] e^{im\varphi'} e^{ihz'} dv', \quad (27)$$

$$H_{zmh}(r) = -\frac{1}{2\pi} \int_{V'} [\Phi_1^M(r, r', \varphi', z'; m, h) + \Phi_2^M(r, r', \varphi', z'; m, h)] e^{im\varphi'} e^{ihz'} dv'. \quad (28)$$

Интегрирование в (27) и (28) выполняется по области  $V'$  точек источника  $r'$  с координатами  $r', \varphi', z'$ . Конкретный вид функций  $\Phi_1^E, \Phi_2^E, \Phi_1^M, \Phi_2^M$  зависит от вида рассматриваемой области, ориентации и типа сторонних источников.

$$\Phi_1^E = \omega \varepsilon_p \frac{k_0}{k_p^2 - h^2} \frac{T_{n,p}^V}{\tilde{Y}_{pE}} V_E(r, r_n) \left[ V_E(r', r_p) R_p^{(1)} + \frac{dV_E(r', r_p)}{dr'} R_p^{(2)} \right], \quad (29)$$

$$\Phi_2^E = \omega \mu_p \frac{k_0}{k_p^2 - h^2} \frac{T_{n,p}^I}{\tilde{Z}_{pH}} Z_{nEH}^C V_{EH}(r, r_n) \left[ I_{EH}(r', r_p) R_p^{(3)} + \frac{dI_{EH}(r', r_p)}{dr'} R_p^{(4)} \right], \quad (30)$$

$$\Phi_1^M = \omega \mu_p \frac{k_0}{k_p^2 - h^2} \frac{T_{n,p}^I}{\tilde{Z}_{pH}} I_H(r, r_n) \left[ I_H(r', r_p) R_p^{(3)} + \frac{dI_H(r', r_p)}{dr'} R_p^{(4)} \right], \quad (31)$$

$$\Phi_2^M = \omega \varepsilon_p \frac{k_0}{k_p^2 - h^2} \frac{T_{n,p}^V}{\tilde{Y}_{pE}} Y_{nHE}^C I_{HE}(r, r_n) \left[ V_{HE}(r', r_p) R_p^{(1)} + \frac{dV_{HE}(r', r_p)}{dr'} R_p^{(2)} \right] \quad (32)$$

Токовые функции  $R_p^{(i)}$  в (29)–(32) учитывают все возможные составляющие сторонних электрических ( $J$ ) и магнитных ( $M$ ) токов:

$$R_p^{(1)} = \frac{k_p^2 - h^2}{j\omega \varepsilon_p} J_z(r', \varphi', z') + \frac{jm}{r'} \left( \frac{h}{\omega \varepsilon_p} J_\varphi(r', \varphi', z') - M_r(r', \varphi', z') \right),$$

$$R_p^{(2)} = \frac{h}{\omega \varepsilon_p} J_r(r', \varphi', z') + M_r(r', \varphi', z'),$$

$$R_p^{(3)} = \frac{K_p^2 - h^2}{j\omega \mu_p} M_z(r', \varphi', z') + \frac{jm}{r'} \left( \frac{h}{\omega \mu_p} M_\varphi(r', \varphi', z') + J_r(r', \varphi', z') \right),$$

$$R_p^{(4)} = \frac{h}{\omega \mu_p} M_r(r', \varphi', z') - J_\varphi(r', \varphi', z').$$

Запись выражений для нормированных напряжений и токов в эквивалентных  $E$ - и  $H$ -линиях, используемых при вычислениях по формулам (29)–(32), существенно зависит от взаимного расположения точек источника  $r'$  и точек наблюдения  $r$ . Рассмотрим два слоя с номерами  $p$  и  $q$ , причем  $p < q$  (рис. 7). В последующих формулах индексом  $n$  отмечены параметры, связанные со слоем, содержащим точку наблюдения, индексом  $i$  — параметры слоя, содержащего точку источника.

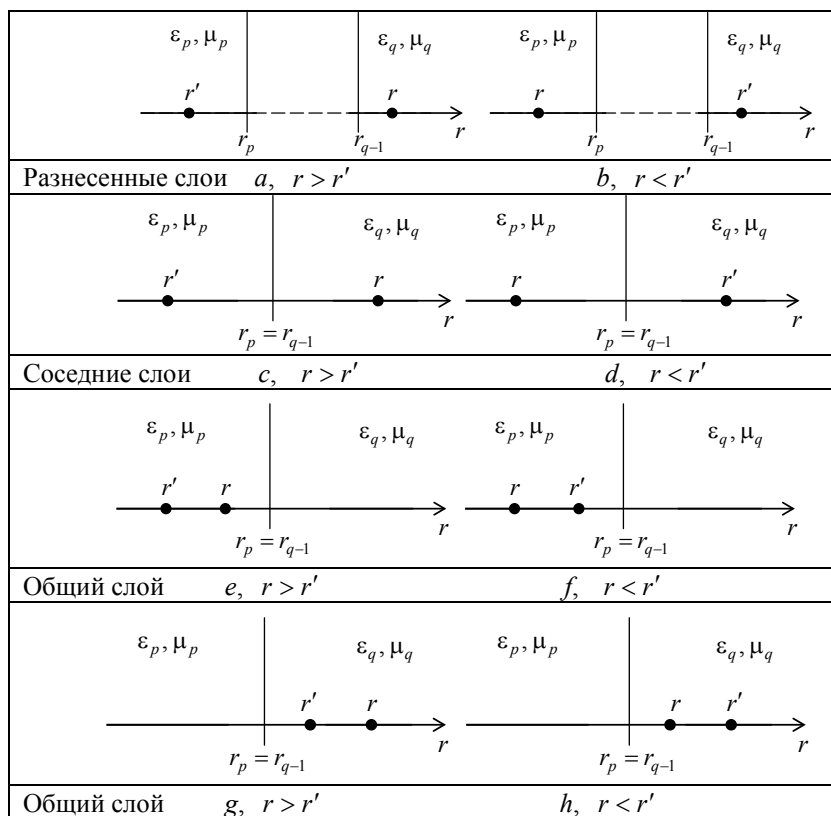


Рис. 7. Варианты расположения точек источника и наблюдения

Далее приняты следующие обозначения:

$$n = \begin{cases} p, & r_{p-1} < r \leq r_p, \\ q, & r_{q-1} < r \leq r_q; \end{cases} \quad i = \begin{cases} p, & r_{p-1} < r' \leq r_p, \\ q, & r_{q-1} < r' \leq r_q; \end{cases} \quad r_n = \begin{cases} r_p, & n = p, \\ r_{q-1}, & n = q; \end{cases} \quad r_i = \begin{cases} r_p, & i = p, \\ r_{q-1}, & i = q. \end{cases}$$

Напряжение в  $E$ -линии и ток в  $H$ -линии для слоя, содержащего точку источника:

$$V_E(r', r_i) = \bar{V}_E(r', r_p), \quad I_H(r', r_i) = \bar{I}_H(r', r_p), \quad r' < r \quad (\text{рис. 6, } a, c, e, g),$$

$$V_E(r', r_i) = \bar{V}_E(r', r_{q-1}), \quad I_H(r', r_i) = \bar{I}_H(r', r_{q-1}), \quad r' > r \quad (\text{рис. 6, } b, d, f, h).$$

Напряжение в  $E$ -линии и ток в  $H$ -линии для слоя, содержащего точку наблюдения:

$$V_E(r, r_n) = \bar{V}_E(r, r_{q-1}), \quad I_H(r, r_n) = \bar{I}_H(r, r_{q-1}), \quad r' < r \quad (\text{рис. 6, } a, c, e, g),$$

$$V_E(r, r_n) = \bar{V}_E(r, r_p), \quad I_H(r, r_n) = \bar{I}_H(r, r_p), \quad r' > r \quad (\text{рис. 6, } b, d, f, h).$$

Ток в Н-линии для слоя, содержащего точку источника, при расчете влияния Н-линии на напряжение в Е-линии:

$$I_{EH}(r', r_i) = \begin{cases} \bar{I}_H(r', r_p), & r' < r_{q-1} \quad (\text{рис. 6, a, c, e, f}), \\ \bar{I}_H(r', r_{q-1}), & r' > r_{q-1} \quad (\text{рис. 6, b, d, g, h}). \end{cases}$$

Напряжение в Е-линии для слоя, содержащего точку источника, наведенное Н-линией:

$$V_{EH}(r, r_n) = \begin{cases} \bar{V}_E(r, r_{q-1}), & r > r_{q-1} \quad (\text{рис. 6, a, c, e, f}), \\ \bar{V}_E(r, r_{q-1}), & r < r_{q-1} \quad (\text{рис. 6, b, d, g, h}). \end{cases}$$

Напряжение в Е-линии для слоя, содержащего точку источника, при расчете влияния Е-линии на ток в Н-линии:

$$V_{HE}(r', r_i) = \begin{cases} \bar{V}_E(r', r_p), & r' < r_{q-1} \quad (\text{рис. 6, a, c, e, f}), \\ \bar{V}_E(r', r_{q-1}), & r' > r_{q-1} \quad (\text{рис. 6, b, d, g, h}). \end{cases}$$

Ток в Н-линии для слоя, содержащего точку наблюдения, наведенный Е-линией:

$$I_{HE}(r, r_n) = \begin{cases} \bar{I}_H(r, r_{q-1}), & r > r_{q-1} \quad (\text{рис. 6, a, c, e, f}), \\ \bar{I}_H(r, r_{q-1}), & r < r_{q-1} \quad (\text{рис. 6, b, d, g, h}). \end{cases}$$

В записанных выше выражениях нормированные напряжения и токи

$$\bar{V}_E(x, r_p) = C_{2m}(\gamma_p x, \gamma_p r_p) - jZ_0 \frac{\beta_p}{\varepsilon'_p} \frac{1}{k_0 r_p} S_{2m}(\gamma_p x, \gamma_p r_p) \bar{Y}_{pE},$$

$$\bar{V}_E(y, r_{q-1}) = C_{2m}(\gamma_q y, \gamma_q r_{q-1}) + jZ_0 \frac{\beta_q}{\varepsilon'_q} \frac{1}{k_0 r_{q-1}} S_{2m}(\gamma_q y, \gamma_q r_{q-1}) \bar{Y}_{q-1E},$$

$$\bar{I}_H(x, r_p) = C_{2m}(\gamma_p x, \gamma_p r_p) - jY_0 \frac{\beta_p}{\varepsilon'_p} \frac{1}{k_0 r_p} S_{2m}(\gamma_p x, \gamma_p r_p) \bar{Z}_{pH},$$

$$\bar{I}_H(y, r_{q-1}) = C_{2m}(\gamma_q y, \gamma_q r_{q-1}) + jY_0 \frac{\beta_q}{\varepsilon'_q} \frac{1}{k_0 r_{q-1}} S_{2m}(\gamma_q y, \gamma_q r_{q-1}) \bar{Z}_{q-1H}.$$

Входные сопротивление и проводимость нагруженной линии влево от сечений  $r_p$  и  $r_{q-1}$  при различном положении опорного сечения относительно границы раздела:



$$\vec{Z}_{pH}, \vec{Y}_{pE} = \begin{cases} \vec{Z}_{pH}^-, \vec{Y}_{pE}^- & x < r_p, \\ \vec{Z}_{pH}^+, \vec{Y}_{pE}^+ & x > r_p. \end{cases} \quad \vec{Z}_{q-1H}, \vec{Y}_{q-1E} = \begin{cases} \vec{Z}_{q-1H}^+, \vec{Y}_{q-1E}^+ & y > r_{q-1}, \\ \vec{Z}_{q-1H}^-, \vec{Y}_{q-1E}^- & y < r_{q-1}. \end{cases}$$

Взаимные проводимости и сопротивления

$$Y_{nHE}^C, Z_{nEH}^C = \begin{cases} \vec{Y}_{q-1HE}^C, \vec{Z}_{q-1EH}^C & r' < r_{q-1} \quad (\text{рис. 6, } a, c, e, f), \\ \vec{Y}_{pHE}^C, \vec{Z}_{pEH}^C & r' > r_{q-1} \quad (\text{рис. 6, } b, d, g, h). \end{cases}$$

Сопротивления и проводимости связи всегда определяются на опорной границе, содержащей точку наблюдения. Следует напомнить, что относительно опорной границы производится нормировка функций распределения эквивалентных токов и напряжений связанного с ней слоя.

### Излучение щели на цилиндре со слоем диэлектрика

В качестве иллюстрации эффективности предложенного метода рассмотрим задачу об излучении щелевой антенны на проводящем цилиндре, покрытом диэлектриком. Ограничимся двухслойным покрытием цилиндра (рис. 8).

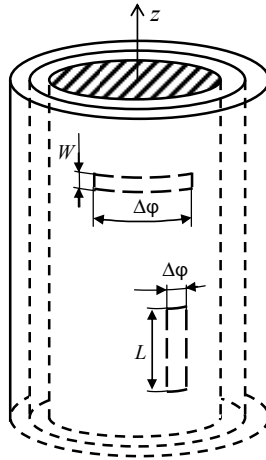


Рис. 8. Азимутальная и продольная щели на цилиндре со слоистым диэлектриком

Для продольной щели распределение магнитного тока в первом приближении описывается следующим образом:

$$\vec{J}_M^{\text{ст}} = \vec{z}_0 \frac{I_0^M}{\Delta\phi r_0} \cos\left(\frac{\pi}{L} z'\right) \delta(r' - r_0), \quad (29)$$

где  $I_0^M$  — амплитуда магнитного тока в щели;  $L$  — длина щели;  $\Delta\varphi$  — угловая ширина щели, связанная с криволинейной шириной щели по формуле  $\Delta\varphi = W/r_0$ ;  $r_0$  — радиус проводящего цилиндра.

Для поперечной щели распределение магнитного тока описывается выражением:

$$\bar{J}_M^{\text{ст}} = \bar{\varphi}_0 \frac{I_0^M}{W} \cos\left(\frac{\pi}{\Delta\varphi} \varphi'\right) \delta(r' - r_0), \quad (30)$$

где  $\Delta\varphi$  — угловая длина щели, связанная с криволинейной длиной щели по формуле  $\Delta\varphi_0 = L/r_0$ ;  $W$  — ширина щели.

При построении скалярных функций Грина необходимо определить функции  $R_p^{(i)}$  сторонних источников (см. предыдущий параграф). В случае продольной к оси  $z$  ориентации щели ( $J_z^M \neq 0$ ) имеем лишь одну токовую функцию

$$R_p^{(3)} = R_1^{(3)} = \frac{k_1 - h^2}{j\omega\mu_1} J_z^M. \quad (31)$$

В (31) учтено, что ток расположен в первом слое цилиндрического укрытия проводящего цилиндра. Для азимутально ориентированной щели, в том числе и кольцевой щели ( $J_\varphi^M \neq 0$ ), имеем две токовых функции

$$R_p^{(2)} = R_1^{(2)} = J_\varphi^M, \quad (32)$$

$$R_p^{(3)} = R_1^{(3)} = \frac{jm}{r'} \frac{h}{\omega\mu_1} J_\varphi^M. \quad (33)$$

В соответствии с предложенным методом для продольной щели компоненты функций Грина имеют вид:

$$\Phi_1^H = \frac{T_{n,p}^I}{\bar{Z}_{pH}} I_H(r, r_n) I_H(r', r_p) J_z^M, \quad (34)$$

$$\Phi_2^E = \frac{T_{n,p}^I}{\bar{Z}_{pH}} Z_{nEH}^C V_{EH}(r, r_n) I_{EH}(r', r_p) J_z^M. \quad (35)$$

В случае азимутальной ориентации щели число составляющих функции Грина возрастает до четырех.

Полученные выражения требуют дальнейшего уточнения — поле в какой области представляет интерес. В основном могут быть две си-

туации: рассчитывается поле излучения щели и определяется проводимость излучения. В первом случае определяется поле во внешней по отношению к укрытию области, то есть точки наблюдения расположены в слое  $r > r_N$ , где  $r_N$  — внешний радиус оболочки цилиндра. Во втором случае точка наблюдения расположена в первом слое, непосредственно примыкающем к проводящему цилиндру ( $r_0 > r > r_1$ ). Для каждого из рассмотренных случаев запись нормированных напряжений и токов отличается.

Определим поле во внешней по отношению к оболочке цилиндра области. Полагаем, что опорная граница для слоя с точками источника  $r_p$  расположена у поверхности проводящего цилиндра ( $r_p = r_1 + 0 = r_1^+$ ), а опорная граница области с точками наблюдения — с внешней стороны оболочки цилиндра ( $r_n = r_N + 0 = r_N^+$ ). Считаем, что оболочка состоит из двух слоев. Запись компонентов скалярных функций Грина для задачи излучения продольной щели (34), (35), в соответствии с рекомендациями предыдущего параграфа, после небольших преобразований выглядит следующим образом:

$$\Phi_1^H = -jk_0 \frac{T_{3,1}^I}{\bar{Z}_{1H}^+ + \bar{Z}_{1H}^-} \bar{I}_H(r', r_0) \bar{I}_H(r, r_2) J_z^{\text{Мст}}, \quad (36)$$

$$\Phi_2^E = -jk_0 \frac{T_{3,1}^I}{\bar{Z}_{1H}^+ + \bar{Z}_{1H}^-} \bar{Z}_{EH}^{\text{св}}(r_2) \bar{I}_H(r', r_0) \bar{V}_E(r, r_2) J_z^{\text{Мст}}. \quad (37)$$

В записанных выше выражениях нормированные напряжения и токи для задачи излучения щели, укрытой двумя слоями магнито-диэлектрика, имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{V}_E(r, r_2) &= C_{2m}(\gamma_3 r, \gamma_3 r_2) + j \bar{Y}_E(r_2^+) \frac{Z_0 \beta_3}{\varepsilon_3' k_0 r_2} S_{2m}(\gamma_3 r, \gamma_3 r_2), \\ \bar{I}_H(r, r_2) &= j Y_0 \frac{\beta_3}{\mu_3} \frac{1}{k_0 r_2} \bar{Z}_H(r_2^+) S_{2m}(\gamma_3 r, \gamma_3 r_2) + C_{2m}(\gamma_3 r, \gamma_3 r_2), \\ \bar{I}_H(r', r_0) &= -j Y_0 \frac{\beta_1}{\mu_1} \frac{1}{k_0 r_0} \bar{Z}_H(r_0^+) S_{2m}(\gamma_1 r', \gamma_1 r_0) + C_{2m}(\gamma_1 r', \gamma_1 r_0). \end{aligned}$$

С учетом выражений для концевых нагрузок внешней неограниченной области (15), (16) выражения для расчета нормированных напряжений и токов в области точек наблюдения упрощаются:

$$\bar{V}_E(r, r_2) = \frac{H_m^{(2)}(\gamma_3 r)}{H_m^{(2)}(\gamma_3 r_2)},$$

$$\bar{I}_H(r, r_2) = \frac{H_m^{(2)}(\gamma_3 r)}{H_m^{(2)}(\gamma_3 r_2)},$$

где  $H_m^{(2)}(x)$  — функция Ганкеля второго рода.

Расчет поля предполагает интегрирование скалярных функций (36), (37) в (27), (28) по области точек источника  $r', \varphi', z'$ .

Учтем, что

$$\begin{aligned} \int_{r'} \bar{I}_H(r', r_0) \delta(r' - r_0) r' dr' &= \bar{I}_H(r_0, r_0) r_0 = r_0, \\ \int_{r'} \frac{d\bar{V}_E(r', r_0)}{dr'} \delta(r' - r_0) r' dr' &= r_0 j \gamma_1 \bar{Y}_E(r_0^+) \frac{Z_0 \beta_1}{\varepsilon_1 k_0 r_0}. \end{aligned}$$

Интегрирование стороннего тока по азимутальной координате в случае кольцевой щели позволяет получить следующий результат:

$$\int_0^{2\pi} e^{-jm'\varphi'} e^{jm\varphi'} d\varphi' = \begin{cases} 2\pi, & m = m' \\ 0, & m \neq m' \end{cases}.$$

В результате интегрирования стороннего тока по поверхности продольной щели получим

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{L} z\right) e^{jhz'} dz' = \int_{-\frac{\Delta\varphi}{2}}^{\frac{\Delta\varphi}{2}} \frac{1}{\Delta\varphi r_0} e^{jm\varphi'} d\varphi' = \frac{1}{r_0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2} m\right)}{\frac{\Delta\varphi}{\pi} m} \frac{2L}{\pi} \cos\left(\frac{L}{2} h\right) \frac{1}{1 - \left(\frac{L}{\pi} h\right)^2}.$$

В дальнейшем при выводе окончательных расчетных формул необходимо учесть, что в соответствии с предположением идеальной проводимости цилиндра эквивалентное сопротивление концевой нагрузки  $H$ -линии  $\bar{Z}_{1H}^+ = 0$ , а эквивалентная концевая проводимость  $E$ -линии  $\bar{Y}_{1E}^+ \rightarrow \infty$ .

Для продольной щели компоненты продольных магнитной и электрической составляющих поля имеют вид:

$$\dot{H}_z = -\frac{1}{\pi^2} \left( \frac{k_0 L}{\pi} \right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jm\varphi} \left[ \frac{\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2} m\right)}{\frac{\Delta\varphi}{2} m} \right] \int_0^{\infty} e^{-jhz} \frac{\cos\left(\frac{L}{2} h\right)}{1 - \left(\frac{L}{\pi} h\right)^2} \frac{T_{3,1}^I}{\bar{Z}_{0H}^+} \frac{H_m^{(2)}(\gamma_3 r)}{H_m^{(2)}(\gamma_3 r_2)} dh, \quad (38)$$

$$\dot{E}_z = -\frac{1}{\pi^2} \left( \frac{k_0 L}{\pi} \right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jm\varphi} \left[ \frac{\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2} m\right)}{\frac{\Delta\varphi}{2} m} \right] \int_0^{\infty} e^{-jhz} \frac{\cos\left(\frac{L}{2} h\right)}{1 - \left(\frac{L}{\pi} h\right)^2} \frac{\bar{Z}_{2EH}^C T_{3,1}^I}{\bar{Z}_{0H}^+} \frac{H_m^{(2)}(\gamma_3 r)}{H_m^{(2)}(\gamma_3 r_2)} dh. \quad (39)$$

Выражения (38), (39) позволяют рассчитать излучаемое поле в любой точке внешней области цилиндра, укрытого слоистым материалом. При определении поля в дальней зоне интеграл по волновому числу  $h$  может быть вычислен приближенно с использованием процедуры метода перевала [8].

Для этого в (38), (39) необходимо сделать замены:  $h = k_0 \sin \hat{\theta}$ ,  $dh = k_0 \cos \hat{\theta} d\hat{\theta}$ ,  $\gamma_3 = k_0 \cos \hat{\theta}$ , и перейти на плоскость комплексного переменного  $\hat{\theta}$ . Координаты точек наблюдения  $r = R \sin \theta$ ,  $z = R \cos \theta$ , где угол  $\theta$  отсчитывается от положительного направления оси  $z$  цилиндрической системы координат. С учетом достаточного удаления точки наблюдения ( $k_0 R \rightarrow \infty$ ) получим следующие расчетные формулы.

Для продольной щели основная поляризация поля определяется продольной компонентой магнитного поля:

$$H_z \approx \frac{j}{\pi^3} (k_0 L) \frac{e^{-jkR}}{R} \frac{\cos\left(\frac{k_0 L}{2} \cos \theta\right)}{1 - \left(\frac{k_0 L}{\pi} \cos \theta\right)^2} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m j^m \times \\ \times \cos m\varphi \left[ \frac{\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2} m\right)}{\frac{\Delta\varphi}{2} m} \right] \frac{T_{3,1}^I}{\bar{Z}_{0H}^+} \frac{1}{H_m^{(2)}(k_0 r_2 \sin \theta)}. \quad (40)$$

Кроссполяризованная составляющая поля связана с продольной компонентой электрического поля, которая в дальней зоне определяется как

$$E_z \approx \frac{j}{\pi^3} (k_0 L) \frac{e^{-jkR}}{R} \frac{\cos\left(\frac{k_0 L}{2} \cos \theta\right)}{1 - \left(\frac{k_0 L}{\pi} \cos \theta\right)^2} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m j^m \times \\ \times \cos m\varphi \bar{Z}_{2EH}^C \left[ \frac{\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2} m\right)}{\frac{\Delta\varphi}{2} m} \right] \frac{T_{3,1}^I}{\bar{Z}_{0H}^+} \frac{1}{H_m^{(2)}(k_0 r_2 \sin \theta)}, \quad (41)$$

где  $\beta_1 = \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \cos^2 \theta}$ .

Для расчета поля по (38)–(41) осталось определить эквивалентные входное сопротивление  $\bar{Z}_{0H}^+$ , коэффициент передачи между опорными сечениями в  $H$ - и  $E$ -линиях  $T_{3,1}^I$  и сопротивление связи  $\bar{Z}_{2EH}^C$ . Для двухслойного укрытия они приобретают следующий вид:

$$\vec{Z}_{0H}^+ = \frac{(R_{31}^0 + R_{32}^0 \vec{Y}_{2E}^+) \vec{Z}_{2EH}^C + R_{33}^0 \vec{Z}_{2H}^+ + R_{34}^0}{(R_{41}^0 + R_{42}^0 \vec{Y}_{2E}^+) \vec{Z}_{2EH}^C + R_{43}^0 \vec{Z}_{2H}^+ + R_{44}^0}, \quad (42)$$

$$T_{3,1}^I = \frac{1}{(R_{41}^0 + R_{42}^0 \vec{Y}_{2E}^+) \vec{Z}_{2EH}^C + R_{43}^0 \vec{Z}_{2H}^+ + R_{44}^0}, \quad (43)$$

$$\vec{Z}_{2EH}^C = -\frac{R_{13}^0 \vec{Z}_{2H}^+ + R_{14}^0}{R_{11}^0 + R_{12}^0 \vec{Y}_{2E}^+}, \quad (44)$$

где концевые проводимости и сопротивления, моделирующие внешнее неограниченное пространство:

$$\vec{Y}_{2E}^+ = jY_0 \frac{\epsilon_3'}{\beta_3} k_0 r_2 \frac{H_m^{(2)'}(\gamma_3 r_2)}{H_m^{(2)}(\gamma_3 r_2)},$$

$$\vec{Z}_{2H}^+ = jZ_0 \frac{\mu_3'}{\beta_3} k_0 r_2 \frac{H_m^{(2)'}(\gamma_3 r_2)}{H_m^{(2)}(\gamma_3 r_2)}.$$

Элементы матрицы передачи, связывающей эквивалентные напряжения и токи Е- и Н-линий в сечениях  $r_0^+$  и  $r_2^+$ , определяются произведением матриц передачи двух слоев и матриц передачи двух границ (рис. 9) и соответствуют модели, показанной на рис. 10.

$$[R^0] = [\bar{C}_1][\Gamma_1][\bar{C}_2][\Gamma_2]. \quad (45)$$

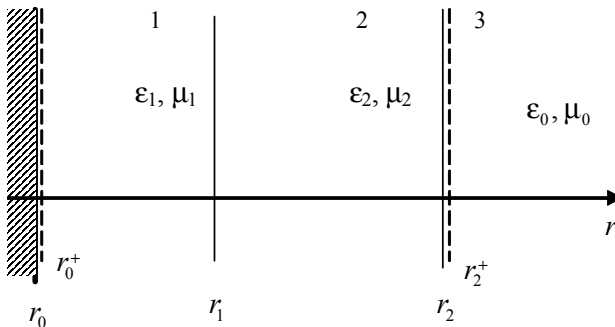


Рис. 9. Двухслойное укрытие проводящего цилиндра

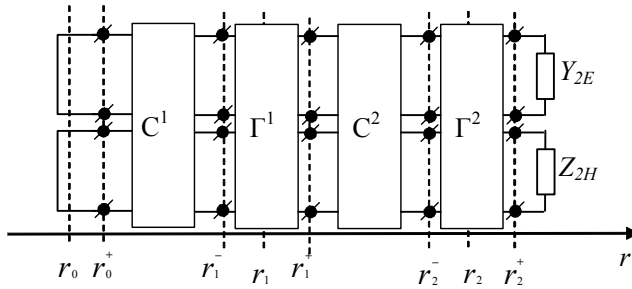


Рис. 10. Моделирование двухслойного покрытия проводящего цилиндра

Для щелей, укрытых одним слоем диэлектрика, матрица передачи  $[R^0]$  упрощается

$$[R^0] = [\bar{C}_1][\Gamma_1]. \quad (46)$$

Границы  $r_1$  и  $r_2$  для однослойного покрытия совпадают.

Предельный переход к проводящему цилиндру без укрытия можно выполнить с использованием к (46) условия  $r_1 = r_2 = r_0$ . В этом случае все матрицы становятся единичными, и в соответствии с (42)–(44) получим  $\bar{Z}_{0H}^+ = \bar{Z}_{2H}^+$ ,  $T^I = 1$ ,  $\bar{Z}_{2EH}^C = 0$ ,  $\bar{Y}_{2HE}^C = 0$ . Поле продольной щели на цилиндре без укрытия будет иметь единственную продольную компоненту поля:

$$H_z \approx \frac{j}{\pi^3} (k_0 L) \frac{e^{-jkR}}{R} \frac{\cos\left(\frac{k_0 L}{2} \cos\theta\right)}{1 - \left(\frac{k_0 L}{\pi} \cos\theta\right)^2} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m j^m \times \\ \times \cos m\varphi \left[ \frac{\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2} m\right)}{\frac{\Delta\varphi}{2} m} \right] (-jY_0) \frac{\cos\theta}{k_0 r_2} \frac{1}{H_m^{(2)}(k_0 r_0 \sin\theta)}.$$

Следует заметить, что поле поперечной щели в цилиндре без укрытия будет иметь две составляющих: основную:

$$E_z \approx -\frac{j}{\pi^3} (\Delta\varphi) \frac{e^{-jkR}}{R} \left[ \frac{\sin\left(\frac{k_0 W}{2} \cos\theta\right)}{\frac{k_0 W}{2} \cos\theta} \right] \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m j^m \times \\ \times \cos m\varphi \frac{\cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2} m\right)}{1 - \left(\frac{\Delta\varphi}{\pi} m\right)^2} \frac{1}{H_m^{(2)}(k_0 r_0 \sin\theta)},$$

и кроссполаризационную

$$H_z \approx -\frac{1}{\pi^3}(\Delta\varphi) \frac{e^{-jkR}}{R} \left[ \frac{\sin\left(\frac{k_0 W}{2} \cos\theta\right)}{\frac{k_0 W}{2} \cos\theta} \right] \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m j^m \times \\ \times \cos m\varphi \frac{\cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2} m\right)}{1 - \left(\frac{\Delta\varphi}{\pi} m\right)^2} m Y_0 \frac{1}{k_0 r_0 H_m^{(2)}(k_0 r_0 \sin\theta)}.$$

С учетом связи продольных составляющих поля в цилиндрической системе координат с поперечными компонентами поля в сферической системе координат,

$$E_\theta = -E_z / \sin\theta, \quad E_\varphi = Z_0 H_z / \sin\theta,$$

можно рассчитать диаграммы направленности щелевых антенн, расположенных на проводящем цилиндре.

Диаграммы направленности излучения продольной и поперечной щелей, прорезанных в проводящем цилиндре с укрытием, показаны на рис. 11–14.

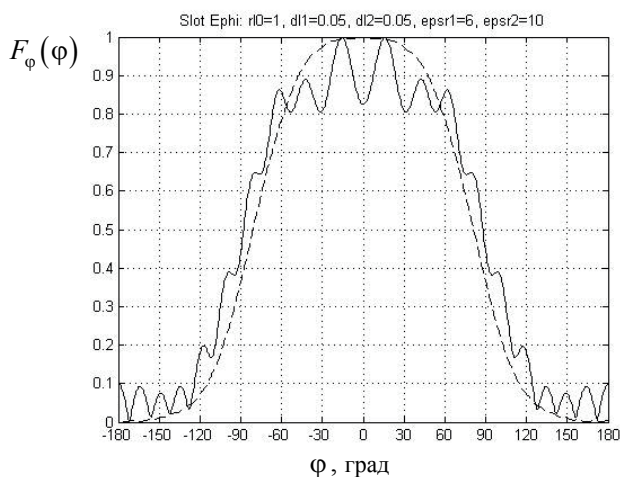


Рис. 11. Диаграмма направленности продольной щели с двухслойным укрытием по главной поляризации в азимутальной плоскости:

( $d_1 = 0,05\lambda_0$ ;  $d_2 = 0,05\lambda_0$ ;  $\varepsilon'_1 = 6$ ;  $\varepsilon'_2 = 10$ );  $r_0 = \lambda_0$  — сплошная линия;  
 $r_0 = 2\lambda_0$  — штриховая линия)



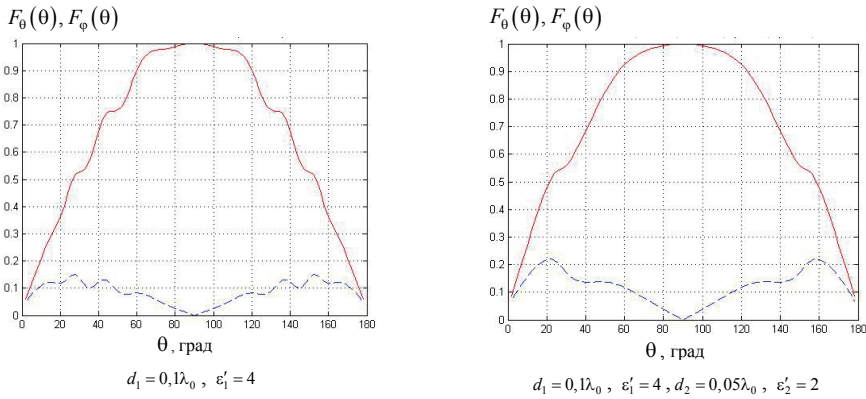


Рис. 12. Диаграмма направленности продольной щели в меридиональной плоскости с однослойным и двухслойным укрытием: главная поляризация ( $E_\varphi$ ) — сплошная линия, кроссполяризационная составляющая ( $E_\theta$ ) — штриховая линия для  $r_0 = \lambda_0$

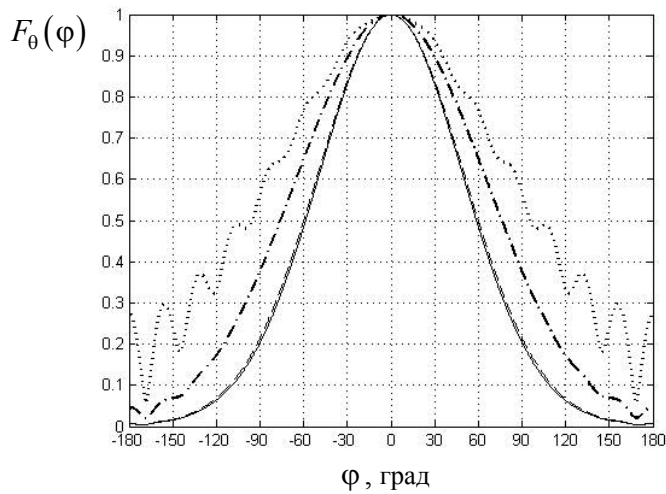


Рис. 13. Диаграмма направленности азимутальной щели в азимутальной плоскости ( $r_0 = \lambda_0$ ,  $d_2 = 0, 05\lambda_0$ ,  $\varepsilon'_1 = 6$ ):  $\varepsilon'_2 = 1$  — сплошная линия;  $\varepsilon'_2 = 2$  — штриховая линия;  $\varepsilon'_2 = 6$  — штрихпунктирная линия;  $\varepsilon'_2 = 8$  — пунктирная линия

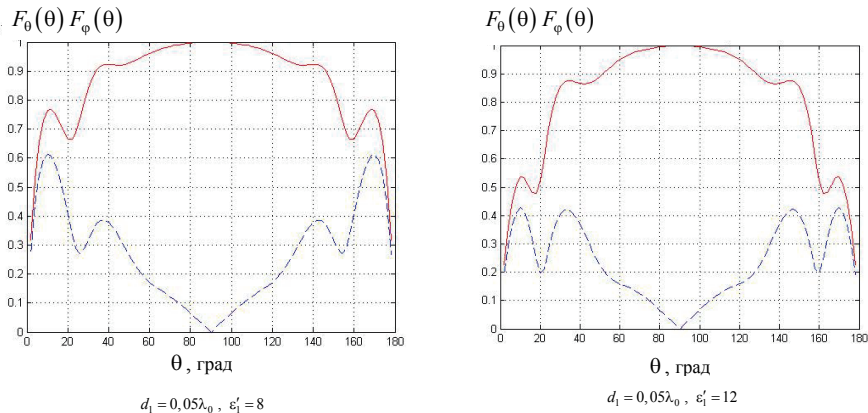


Рис. 14. Диаграмма направленности азимутальной щели с однослойным укрытием по главной ( $E_\theta$ , сплошная линия) и кросспolarизационной ( $E_\phi$ , штриховая линия) поляризациям  $r_0 = 0,5\lambda_0$ ,  $d_1 = 0,05\lambda_0$

Из приведенных рисунков видно, что уровень кросспolarизационного излучения в меридиональной плоскости у азимутальных щелей существенно выше, чем у продольных. Продольные щели формируют изрезанную диаграмму направленности в азимутальной плоскости при повышении диэлектрической проницаемости материала укрытия и с ростом радиуса несущего цилиндра. У азимутальных щелей изрезанность диаграмм направленности в азимутальной плоскости менее выражена. Изрезанность диаграмм направленности в азимутальной плоскости обусловлена резонансом поверхностных волн, возбуждаемых в структуре диэлектрика на проводящей поверхности цилиндра.

Отметим, что использованное ранее предположение об идеальной проводимости несущего цилиндра не является необходимым. Если задано конечное значение проводимости металла цилиндра, то в записанных ранее выражениях следует учесть, что эквивалентное входное сопротивление

$$\bar{Z}_{1H}^+ = -k_0 r_0 \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma}} (1 + j),$$

а эквивалентная концевая проводимость

$$\bar{Y}_{1E}^+ = -k_0 r_0 \sqrt{\frac{2\sigma}{\omega \mu_0}} \frac{(1 - j)}{2},$$

где  $\sigma$  — удельная проводимость металла цилиндра.

В связи с тем что расчеты диаграмм направленности щелевых антенн, расположенных на поверхности проводящего цилиндра, укрытого слоистым диэлектриком, проводятся по полученным формулам,

время вычислений на порядки меньше, чем у широко используемых в настоящее время специализированных компьютерных программ типа FEKO, CST Microwave Studio и им подобных, где применяются численные методы, связанные с разбиением пространства на сегменты и решением алгебраических уравнений очень высокого порядка.

Выше был рассмотрен пример анализа излучения щелевых антенн. Аналогично решается задача излучения, например, печатных антенн, расположенных на цилиндре со слоистым укрытием.

Для задач дифракции электромагнитных волн также используется описанный выше математический аппарат. Отличие заключается лишь в том, что в качестве источника электромагнитного излучения рассматриваются нити электрического или магнитного тока, соосные с осью  $z$  [9]. Выбор типа сторонних токов зависит от требуемой поляризации падающего поля. Увод тока на достаточно большое расстояние позволяет сформировать плоскую волну, а фазовая скорость тока задает угол прихода падающей волны. Применение метода перевала позволяет получить замкнутые выражения для расчета суммарного электромагнитного поля. Аналитическое вычитание из суммарного поля падающего дает возможность вывести аналитические выражения для расчета рассеянного поля. Все вычисления вновь проводятся на порядки быстрее традиционных в настоящее время программ электромагнитного моделирования.

### Заключение

В статье показана эффективность применения метода функций Грина неоднородных сред применительно к задачам излучения, распространения и дифракции электромагнитных волн. Полученные аналитические выражения позволили на два-три порядка ускорить вычисление диаграмм направленности печатных и щелевых антенн, расположенных на цилиндрической поверхности, и диаграмм рассеяния в задачах дифракции на слоистых цилиндрах. Метод позволяет рассчитывать характеристики конструкций с материалами, имеющими произвольные электродинамические параметры, в том числе метаматериалами. Показано применение предложенного подхода к решению задачи излучения продольных и азимутальных щелей, прорезанных в проводящем цилиндре с двумя слоями покрытия. Приведены диаграммы направленности по основной и кроссполяризованной составляющим. Отмечено существенное влияние характеристик материала укрытия на диаграммы направленности антенн.

### Литература

1. Tokgoz C., Dural G. Closed-form Green's functions for cylindrically stratified media // IEEE Transactions on Microwave theory and Techniques. 2000. Vol. 48. № 1. Pp. 40–49.

2. Wait J. R. General solution for excitation by slotted aperture source in conducting cylinder with concentric layering // *IEEE Transactions on Microwave theory and Techniques*. 1993. Vol. 35. № 3. Pp. 321–325.

3. Xiang Z., Lu Y. Electromagnetic dyadic Green's function in cylindrically multi-layered media // *IEEE Transactions on Microwave theory and Techniques*. 1996. Vol. 44. № 4. Pp. 614–621.

4. Erturk V. B., Rojas R. G. Efficient computation of surface fields excited on a dielectric-coated circular cylinder // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2000. Vol. 48. № 10. Pp. 1507–1515.

5. Thiel M., Dreher A. Dyadic Green's function of multiplayer cylindrical closed and sector structures for waveguide, microstrip-antenna, and network analysis // *IEEE Transactions on Microwave theory and Techniques*. 2002. Vol. 50. № 11. Pp. 2576–2579.

6. Dailis S., Shabunin S. Microstrip antennas on metallic cylinder covered with radially inhomogeneous magnetodielectric // *Proc. of 9th Int. Wroclaw Symp. on Electrom. Compatib.* 1988. Part 1. Pp. 271–277.

7. Felsen L., Marcuvitz N. *Radiation and Scattering of Waves*. Prentice-Hall, Inc. New Jersey, 1973. Vol.1.

8. Марков Г. Т., Чаплин А. Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М., Л. : Энергия, 1967. 191 с.

9. Green's function formulation for multilayered cylindrical structures and its application to scattering problems / S. Knyazev, Y. Kostitsyn, B. Panchenko, S. Shabunin // *Antennas and Propagation (EUCAP), Proceedings of the 5th European Conference on* Year. 2011. Pp. 498–501.

## References

1. Tokgoz C., Dural G. Closed-form Green's functions for cylindrically stratified media. *IEEE Transactions on Microwave theory and Techniques*, 2000, Vol. 48, № 1, pp. 40–49.

2. Wait J. R. General solution for excitation by slotted aperture source in conducting cylinder with concentric layering. *IEEE Transactions on Microwave theory and Techniques*, 1993, Vol. 35, № 3, pp. 321–325.

3. Xiang Z., Lu Y. Electromagnetic dyadic Green's function in cylindrically multi-layered media. *IEEE Transactions on Microwave theory and Techniques*, 1996, Vol. 44, № 4, pp. 614–621.

4. Erturk V. B., Rojas R. G. Efficient computation of surface fields excited on a dielectric-coated circular cylinder. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2000, Vol. 48, № 10, pp. 1507–1515.

5. Thiel M., Dreher A. Dyadic Green's function of multiplayer cylindrical closed and sector structures for waveguide, microstrip-antenna, and network analysis. *IEEE Transactions on Microwave theory and Techniques*, 2002, Vol. 50, № 11, pp. 2576–2579.

6. Dailis S., Shabunin S. Microstrip antennas on metallic cylinder covered with radially inhomogeneous magnetodielectric. *Proc. of 9th Int. Wroclaw Symp. on Electrom. Compatib.*, 1988, Part 1, pp. 271–277.

7. Felsen L., Marcuvitz N. *Radiation and Scattering of Waves*. Prentice-Hall, Inc. New Jersey, 1973. Vol. 1.

8. Markov G.T., Chaplin A. F. *Vozbuzhdenie elektromagnitnyh voln* (Excitation of electromagnetic waves). Moscow, Ehnergiya Publ., 1967. 191 p.

9. Knyazev S., Kostitsyn Y., Panchenko B., Shabunin S. Green's function formulation for multilayered cylindrical structures and its application to scattering problems. *Antennas and Propagation (EUCAP)*, Proceedings of the 5th European Conference on Year, 2011, pp. 498–501.

### Информация об авторах

**Самуил Дайлис** получил диплом радиоинженера в Уральском политехническом институте (Екатеринбург) в 1970 г. и степень кандидата технических наук в Уральском государственном техническом университете (Екатеринбург) в 1998 г. Он имеет многолетний инженерный, научно-исследовательский и преподавательский опыт работы в Уральском государственном техническом университете и в компании Applied Wave Research Corporation, El Segundo, California, USA (в настоящее время AWR Group в составе National Instruments Corporation), где занимает должность старшего инженера по разработке компьютерных моделей. Сферой его научных и исследовательских интересов является компьютерное моделирование и разработка СВЧ приборов и устройств.

**Сергей Шабунин** в 1977 г. окончил Уральский политехнический институт (Екатеринбург) по специальности «Радиотехника», в 1984 г. защитил кандидатскую диссертацию в Московском энергетическом институте, в 2016 г. — докторскую в Уральском государственном техническом университете. С момента окончания работает в Уральском федеральном университете, пройдя ступени инженера, научного сотрудника, доцента и профессора. В настоящее время является профессором Департамента радиоэлектроники и связи и с 2015 г. директором Института радиоэлектроники и информационных технологий. Научные интересы лежат в области исследования электродинамики, антенн и антенных решеток, микроволновых устройств, распространения радиоволн, метаматериалов и антенных укрытий.

### Information about the authors

**Samuil Daylis** received his Dipl. Eng. degree in radio electronics from the Ural State Technical University, Ekateriburg, Russia, in 1970, and Ph.D degree from the Ural State Technical University, Ekateriburg, Russia, in 1998. He obtained a long-term academic and industrial experience working with the Ural State Technical University, Yekateriburg, Russia, and with Applied Wave Research Corporation, El Segundo, California, USA (currently National Instruments Corporation, AWR Group) as an Engineer, Researcher, Lecturer, and Educator. He has been with AWR since 1999 to present and currently holds a position of a Senior Model Development Engineer. His research interests are in computer modeling and design of microwave circuits and devices.

**Sergey N. Shabunin** received his Ph.D degree from Moscow Power Engineering Institute, Russia in 1984 and Post-Doctorate degree from Ural Federal University, Ekaterinburg, Russia in 2006. He has been with Ural Federal University since 1997 as Engineer, Researcher, Educator and Professor. Since 2015 he holds a position of Director of Radioelectronics and Information Technologies Institute. His research interests are in electrodynamics, antennas and antenna arrays, microwaves devices, radio wave propagation, metamaterials and antenna radomes.